甲部(1)（35 分）

1. 令 h 成為公式 $\frac{5}{h+k}=\frac{k}{h-3}$ 的主項。 (3分)

$5h-15=kh+k^2$

$5h-kh=k^2+15$

$(5-k)h=k^2+15$

$h=\frac{k^2+15}{5-k}$

2. 化簡 $\frac{x^{-8}y}{(x^7y^9)^{-6}}$，並以正指數表示答案。 (3分)

$=\frac{x^{-8}y}{x^{-42}y^{-54}}$

$=x^{-8+42}y^{1+54}$

$=x^{34}y^{55}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 在某渡輪上，女乘客人數較男乘客人數多 40%。若 24 名女乘客離開該渡輪，則男乘客人數較女乘客人數多 40%。求在該渡輪上男乘客人數。 (4分)

設男乘客有 x 人

之前女有 $x \times (1+40\%) = 1.4x$.

現在女：$1.4x - 24$.

$(1.4x-24) \times (1+40\%) = x$.

$(1.4x-24) \times 1.4 = x$.

$1.96x - 33.6 = x$.

$0.96x = 33.6$ ∴男有

$x = 35$. 35人.

6. 設 a、b 及 c 均為非零的數使得 $7a=6b$ 及 $\frac{4a-3c}{2b-c}=9$。求

(a) $a:b:c$，

(b) $\frac{5a+8b}{7b+3c}$。

(4分)

(a) $7a = 6b$.

$a = \frac{6}{7}b$.

$\frac{4a-3c}{2b-c} = 9$.

$4 \times \frac{6}{7}b - 3c = 18b - 9c$.

$\frac{24}{7}b - 3c = 18b - 9c$.

$6c = \frac{102}{7}b$. $c = \frac{17}{7}b$.

∴ $a:b:c = \frac{6}{7}b : b : \frac{17}{7}b = 6:7:17$.

(b) $\frac{5a+8b}{7b+3c} = \frac{5 \times \frac{6}{7}b + 8b}{7b + 3 \times \frac{17}{7}b} = \frac{43}{50}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 下面的幹葉圖顯示一群工人在某星期的工作時數的分佈。

幹（十位）	葉（個位）								
2	a =2	5	5	6	6	8	8		
3	3	3	3	4	5	5	9	9	
4	0	1	4	4	5	6	7	7	9

該分佈的分佈域為 27。

(a) 求該分佈的平均值及眾數。

(b) 若從該群中隨機選出一名工人，求所選出的工人在該星期的工作時數超過該分佈的眾數的概率。

(5 分)

(a). 49 − (20+a) = 27. a=2.

平均數 = 36. 眾數=33.

(b) 所求概率 = $\frac{14}{24}$ = $\frac{7}{12}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 下表顯示某班學生擁有計算機的數目的分佈。

擁有計算機的數目	1	2	3	4
學生人數	8	5	n 6.	1

該分佈的平均值為 2。

(a) 求該分佈的中位數、四分位數間距及方差。 (5 分)

(b) 該班現有兩名學生退學。得知該分佈的平均值維持不變。該分佈的分佈域有否因該兩名學生退學而改變？試解釋你的答案。 (2 分)

(a). $\dfrac{1\times8+2\times5+3n+4\times1}{8+5+n+1}=2.$ $n=6.$

中位数 $=2$. 四分位数间距 $=3-1=2$

方差 $=\dfrac{(1-2)^2\times8+(2-2)^2\times5+(3-2)^2\times6+(4-2)^2\times1}{8+5+6+1}$

$=0.9$

(b). 設退学二人拥有计算器数目为 x, y

$\dfrac{2\times20-x-y}{18}=2.$

$x+y=4.$

$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

都不影响分布域. ∴不改变

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 定義 $g(x)=x^3+5x^2-12x-1$。設 $h(x)=3x^4+ax^3-16x^2+bx+c$，其中 a、b 及 c 均為常數。當 $h(x)$ 除以 $g(x)$ 時，商式與餘式相等。

(a) 求當 $h(x)$ 除以 $g(x)$ 時的商式。 (3 分)

(b) 方程 $h(x)=0$ 有多少個有理根？試解釋你的答案。 (4 分)

(a) 設 $h(x)=g(x)(mx+n)+(mx+n)$.

$3x^4+ax^3-16x^2+bx+c=(x^3+5x^2-12x-1)(mx+n)+mx+n$

$3x^4+ax^3-16x^2+bx+c=mx^4+nx^3+5mx^3+5nx^2-12mx^2-12nx$

$-mx-n+mx+n$.

$=mx^4+(n+5m)x^3+(5n-12m)x^2-12nx$

$\begin{cases} m=3 \\ n+5m=a. \\ 5n-12m=-16. \\ -12n=b. \\ c=0. \end{cases}$ $\begin{cases} m=3 \\ n=4 \\ a=19 \\ b=-48 \\ c=0. \end{cases}$

∴商式为 $3x+4$.

(b) $h(x)=(x^3+5x^2-12x-1)(3x+4)+(3x+4)$

$=(x^3+5x^2-12x)(3x+4)$

若 $h(x)=0$. $x^3+5x^2-12x=0$. 或 $3x+4=0$.

$x(x^2+5x-12)=0$

$x=0$. 或 $x=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{2}$. 或 $x=-\frac{4}{3}$.

∴有2个有理根

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

15. 某盒子內有 5 個紅球及 4 個黑球。從該盒子中隨機同時抽出 2 個球。

(a) 求所抽出的 2 個球均為紅色的概率。 (2 分)

(b) 某袋子內有 8 個紅球。把從該盒子中所抽出的 2 個球放入該袋子內，然後從該袋子中隨機同時抽出 3 個球。求所抽出的 3 個球為相同顏色的概率。 (2 分)

(a) 所求概率 $= \frac{C^5_2}{C^9_2} = \frac{5}{18}$

(b)

5R4B

所求概率 $= \frac{C^4_2}{C^9_2} \times \frac{C^8_3}{C^{10}_3}$

8R

10

$+ \frac{C^5_2}{C^9_2} \times \frac{C^{10}_3}{C^{10}_3}$

$+ \frac{C^5_1 \times C^4_1}{C^9_2} \times \frac{C^9_3}{C^{10}_3}$ ① 2黑 3紅

$= \frac{7}{90} + \frac{5}{18} + \frac{7}{18}$

$= \frac{67}{90}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$PQ=\sqrt{(32-50)^2+t^2}=\sqrt{324+t^2}$

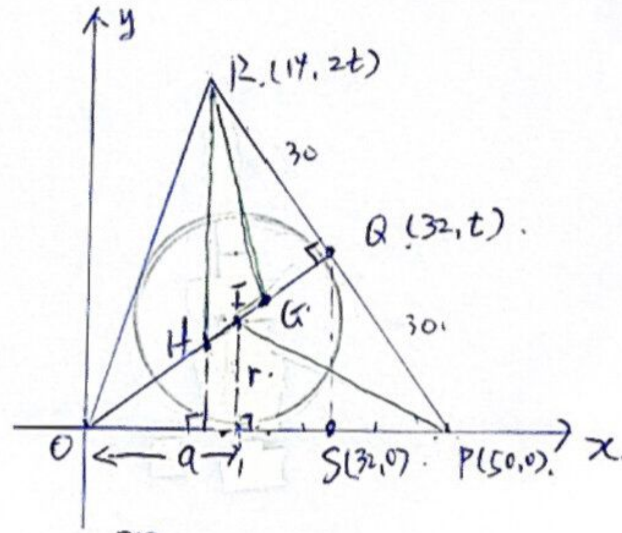
$OQ=\sqrt{32^2+t^2}=\sqrt{1024+t^2}$

$\tan\angle POQ=\dfrac{\sqrt{324+t^2}}{\sqrt{1024+t^2}}=OQ$ 斜率 $=\dfrac{t}{32}$.

$\dfrac{324+t^2}{1024+t^2}=\dfrac{t^2}{1024}$ $\quad t=24$

(ii) ∵ $OQ\perp RP$. $GQ\perp RP$. ∴ O、G、Q 共线

(iii) $R(14,48)$. $Q(32,24)$.
$H(14,\frac{21}{2})$. $G(25,\frac{75}{4})$



设点I坐标为 (a,r)

∵ O、G、Q 共线，∴ I在直线OQ上.

$OQ: 32y=24x$.

∴ $32r=24a$.

Q为内切圆的切点. ∴ $50-a=\dfrac{PQ}{2}$.

$50-a=30$. $\quad a=20$.

∴ $r=15$.

$\triangle GHR$ 面积 : $\triangle IPQ$ 面积 $=HG:r$

$HG=\sqrt{(14-25)^2+(\frac{21}{2}-\frac{75}{4})^2}=\dfrac{55}{4}$

∴所求比 $=\dfrac{55}{4}:15$

$=11:12$

3. 若一包芝士的重量量得 220 g 準確至最接近的 10 g，則稱它為*普通袋*。某人宣稱 250 包*普通袋*芝士的總重量可量得 53.6 kg 準確至最接近的 0.1 kg。該宣稱是否正確？試解釋你的答案。 (3 分)

$\frac{10}{2}=5g$. $220-5=215g$. $215\times250=53750g$

$\approx 53.8kg$.

$220+5=225g$ $225\times250=56250g$

$\approx 56.2kg$.

∴不正確

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 考慮複合不等式

$3x+2>\frac{4x-5}{2}$ 及 $3x-2<7$ .... (*)。

(a) 解 (*)。

(b) 有多少個負整數滿足 (*)？

(4 分)

(a). $6x+4>4x-5$ $3x<9$

$2x>-9$ $x<3$.

$x>-4.5$.

∴ $-4.5<x<3$

(b) $-4, -3, -2, -1$.

∴ 4个

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 圖 1 中，PR 為圓 $PQRS$ 的一直徑。將 PR 與 QS 的交點記為 T。

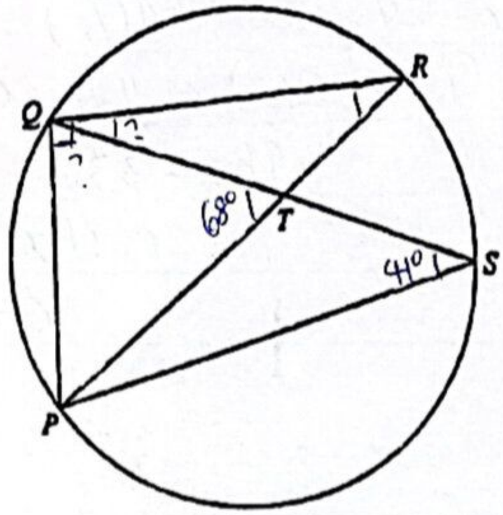


圖 1

若 $\angle PSQ = 41°$ 及 $\angle PTQ = 68°$，求 $\angle RQS$ 及 $\angle PQS$。 (4 分)

$\angle QRP = \angle PSQ = 41°$

$\because \angle PTQ = 68°$ $\therefore \angle RQS = 68° - 41°$

$= 27°$

$\because$ PR 為直徑 $\therefore \angle PQR = 90°$

$\therefore \angle PQS = 90° - 27°$

$= 63°$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 圖 2 中，AB 與 CD 相交於點 E。已知 $AC // DB$。

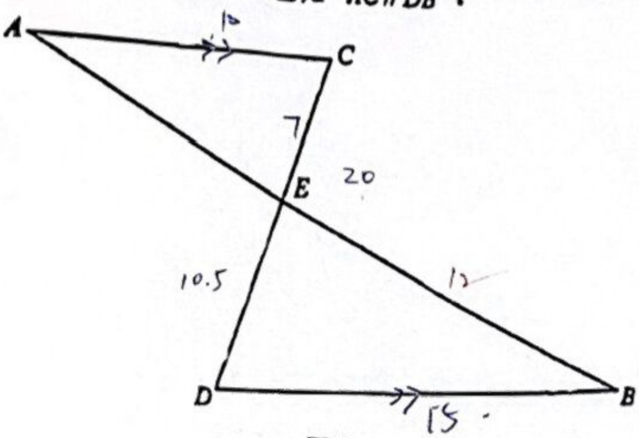


圖 2

(a) 證明 $\Delta ACE \sim \Delta BDE$。

(b) 假定 $AB = 20$ cm、$AC = 10$ cm、$BD = 15$ cm 及 $CE = 7$ cm。ΔBDE 是否一直角三角形？試解釋你的答案。

(5 分)

(a) ∵ $AC // DB$ (已知)

∴ $\angle CAE = \angle DBE$ $\angle ACE = \angle BDE$

(內錯角，$AC // DB$)

∴ $\Delta ACE \sim \Delta BDE$ (AA)

(b) 設 $DE = x$.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{BE}.$$

$$\frac{10}{15} = \frac{7}{DE} = \frac{20-BE}{BE}.$$

∴ $DE = 10.5$，$BE = 12$ cm

$DE^2 + BE^2 = 10.5^2 + 12^2 = 254.25$

$BD^2 = 15^2 = 225$.

∴ 不是直角三角形

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

甲部(2)（35 分）

10. 已知 A 及 B 為直角坐標平面上的兩相異點。設 P 為該直角坐標平面上的一動點使得 P 與 A 及 B 等距。將 P 的軌跡記為 Γ。

(a) 描述 Γ 與 AB 之間的幾何關係。 (1 分)

(b) 假定 A 的坐標為 $(2, -4)$ 及 Γ 的方程為 $3x+y-12=0$。求

(i) 通過 A 及 B 的直線的方程，

(ii) 以 AB 為一直徑的圓的方程。

(5 分)

(a) Γ 是 AB 的垂直平分线。

(b) (i) Γ 的直线方程：$y=-3x+12$ $\because \Gamma \perp AB$

AB 斜率 $=\frac{1}{3}$ 且过点 A。

$\frac{y+4}{x-2}=\frac{1}{3}$

$3y+12=x-2$

$x-3y-14=0$

(ii) 圆心为 AB 中点，也是 AB 与 Γ 的交点。

$\begin{cases} x-3y-14=0 \\ 3x+y-12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

半径 $=\sqrt{(5-2)^2+(-3+4)^2}$

$=\sqrt{10}$

$\therefore$ 圆：$(x-5)^2+(y+3)^2=10$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 已知 $f(x)$ 的一部分為常數，而另一部分則隨 x^2 正變。假定 $f(10)=62$ 及 $f(15)=122$。

(a) 求 $f(5)$。 (3分)

(b) 假定 $U(0,u)$ 及 $V(5,v)$ 均為 $y=f(x)$ 的圖像上的點。通過 V 的水平線與 y 軸相交於點 W。將通過 U、V 及 W 的圓記為 C。以 π 表 C 的圓周。 (4分)

(a) 設 $f(x)=k_1+k_2x^2$ $(k_1, k_2 \neq 0)$.

$\begin{cases} k_1+100k_2=62 \\ k_1+225k_2=122 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1=14 \\ k_2=0.48 \end{cases}$

$f(x)=14+0.48x^2$.

$f(5)=14+0.48\times 5^2=26$.

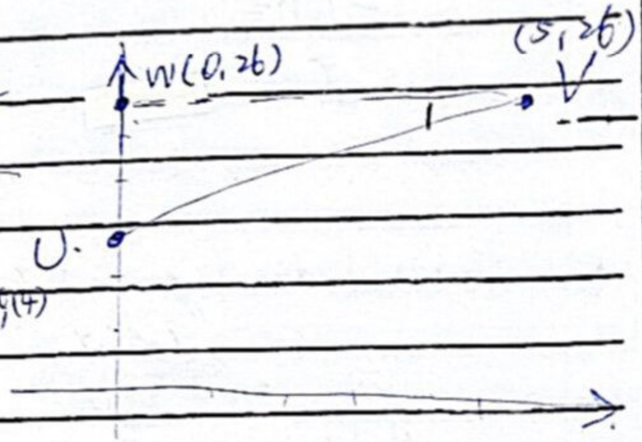
(b) ∵ $U(0,14)$, $V(5,26)$.

∵ $UW \perp VW$

∴ 圓 C 是以 UV 為直徑的圓.

$UV=\sqrt{(5-0)^2+(26-14)^2}$

$=13$.



∴ C 的圓周 $=13\pi$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12/18 · 某實心金屬直立圓錐體的底半徑及曲面面積分別為 14 cm 及 $700\pi\ cm^2$ 。

(a) 求該圓錐體的高。 (3 分)

(b) 將該圓錐體以一平行於其底的平面分成一直立圓錐體 X 及一平截頭體 Y 。 Y 的曲面面積為 X 的曲面面積之 15 倍。

(i) 以 π 表 Y 的體積。

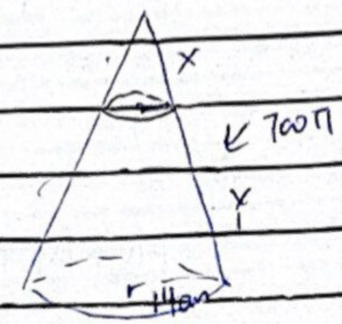
(ii) 若把 Y 熔化，並重鑄成 2 個完全相同的實心球體，求每個球體的直徑。 (5 分)

(a) 設斜高為 l.

$\pi \times 14 \times l = 700\pi$.

$l = 50$ cm.

$\therefore$ 高 $= \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$.



(b) (i) $X + 15X = 700\pi$

$X = 43.75\pi$

$\left(\sqrt{\frac{43.75\pi}{700\pi}}\right)^3 = \frac{V_x}{V_{總}}$ $V_{總} = \frac{1}{3}\pi \times 14^2 \times 48$

$= 3136\pi\ cm^3$

$\frac{1}{64} = \frac{V_x}{3136\pi}$

$V_X = 49\pi\ cm^3$ $\therefore V_Y = 3087\pi\ cm^3$

(ii) 設直徑為 d.

$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \times 2 = 3087\pi$.

$d = 21$ cm

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

16. (a) 設 a 及 b 均為實常數。若方程 $x^2+ax+b=0$ 的根為 p 及 $5p$，證明 $5a^2=36b$。 (2分)

(b) 將圓 $x^2+y^2-6x-12y+20=0$ 記為 C。求常數 m 使得直線 $y=mx$ 與 C 相交於點 Q 及點 R 且 $OQ:QR=1:4$，其中 O 為原點。 (3分)

(a). $p+5p=-a$. $a=-6p$

$\therefore 5a^2 = 5\times(-6p)^2$

$= 180p^2$.

$p\times 5p = b$ $b=5p^2$.

$\therefore 36b = 36\times 5p^2 = 180p^2$

$\therefore 5a^2 = 36b$.

(b). $x^2+y^2-6x-12y+20=0$.

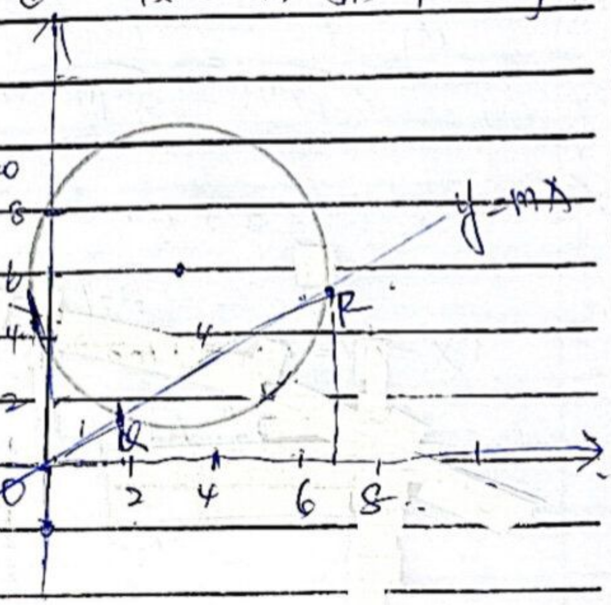
圓心 $(3,6)$ $r=5$.

$\begin{cases} x^2+y^2-6x-12y+20=0 & —① \\ y=mx & —② \end{cases}$ 設 $Q(x_1,y_1)$ $R(x_2,y_2)$

Sub ② into ①.

$(1+m^2)x^2+(-12m-6)x+20=0$

$x^2+\frac{-12m-6}{1+m^2}x+\frac{20}{1+m^2}=0$



$\because OQ:QR=1:4$

$\therefore x_1:x_2=1:5$.

$\therefore x_2=5x_1$

From (a),

兩根為 x_1 和 $5x_1$.

則 $5\times\left(\frac{-12m-6}{1+m^2}\right)^2 = 36\times\frac{20}{1+m^2}$

$m=\frac{3}{4}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

19. 點 P 及點 Q 的坐標分別為 $(50,0)$ 及 $(32,t)$，其中 $t>0$。將原點記為 O。設 R 為一點使得 OQ 為 ΔOPR 的中線。假定 G 及 H 分別為 ΔOPR 的外心及垂心。

(5 分)

(a) 以 t 表 G 及 H 的坐標。

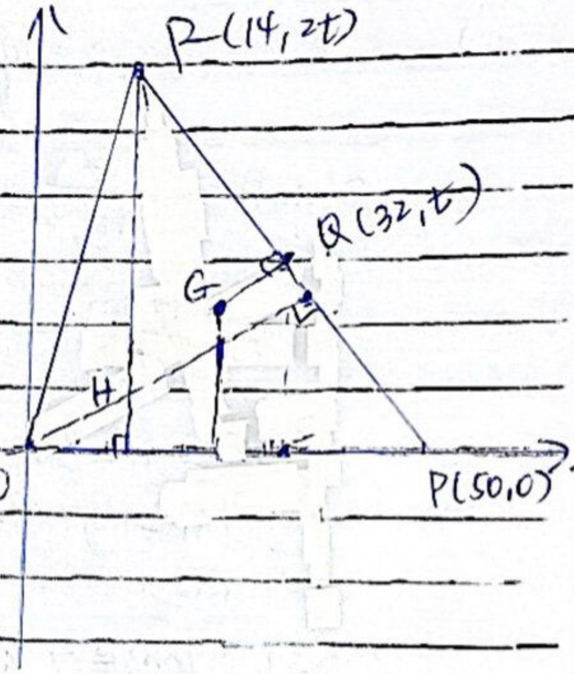
(b) 設 S 為 OP 上的一點使得 QS 垂直於 OP。已知 $\angle PQS = \angle POQ$。

(i) 藉考慮 $\tan\angle PQS$，證明 $t = 24$。

(ii) O、G 與 Q 是否共線？試解釋你的答案。

(iii) 將 ΔOPR 的內心記為 I。求 ΔGHR 的面積與 ΔIPQ 的面積之比。

(7 分)



(a) OP中点 $T(25,0)$

RP中点为 Q

$\therefore Q(14, 2t)$

点G坐标为 $(25, y_1)$.

GQ斜率 $= \dfrac{y_1-t}{-7}$

RP斜率 $= \dfrac{2t}{-36}$

$\dfrac{y_1-t}{-7} \times \dfrac{2t}{-36} = -1$

$y_1 = \dfrac{t^2-126}{t}$

$\therefore G\left(25, \dfrac{t^2-126}{t}\right)$

$\because$ H为垂心. $\therefore$ 设 $H(14, h)$. $OH \perp PR$.

$\dfrac{h}{14} \times \left(-\dfrac{2t}{36}\right) = -1$.

$\therefore h = \dfrac{252}{t}$. $\therefore H\left(14, \dfrac{252}{t}\right)$.

(b) (i) S坐标 $(32,0)$

$\because \angle PQS = \angle POQ$. $\because \angle OPQ$ 为公共角 $\therefore \Delta PQS \sim \Delta POQ$

$\therefore \angle OQP = \angle QSP = 90^\circ$

$\tan\angle PQS = \tan\angle POQ = \dfrac{PQ}{OQ}$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。